

**Второй тур 27.11.2025. Высшая лига.**

1. У Саши и Ильи есть граф с 2025 вершинами без рёбер. Вершины пронумерованы числами  $1, 2, \dots, 2025$ . Саша и Илья делают ходы по очереди, начинает Саша. За один ход игрок проводит одно ребро, при этом в графе не должно появиться кратных рёбер и циклов. После проведения ребра между вершинами  $i$  и  $j$  ему присваивается вес  $|i - j|$ . Когда рёбер больше проводить нельзя, считается сумма весов всех проведенных ребер. Саша стремится сделать ее как можно большей, а Илья — как можно меньшей. Чему будет равна эта сумма при правильной игре?

2. В пространстве даны три красных и три синих выпуклых многогранника. Каждый красный многогранник имеет общую точку с каждым синим. Докажите, что существует прямая, пересекающая либо все красные, либо все синие многогранники.

3. Даны два натуральных числа  $A$  и  $B$  без нулей в десятичной записи. Число  $B'$  получается, если записать цифры  $B$  в обратном порядке. Оказалось, что числа  $A - B$  и  $AB' - 1$  являются степенями десятки с целыми неотрицательными показателями. Чему может равняться  $B$ ?

4. Клетки таблицы  $n \times n$ , где  $n > 1$ , заполнены натуральными числами от 1 до  $n$  так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Рассмотрим все (неупорядоченные) пары клеток, находящихся в одной строке. Назовём такую пару *правильной*, если число в левой клетке меньше, чем в правой. Найдите наибольшее возможное количество правильных пар клеток.

5. Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . Прямая  $\ell$  пересекает отрезки  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно, продолжение  $AC$  за точку  $A$  в точке  $R$ , а меньшие дуги  $AB$  и  $BC$  окружности  $\Omega$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть  $T_1$  — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, касающимся отрезков  $QY$ ,  $BC$  и окружности  $\Omega$ ; а  $T_2$  — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, касающимся отрезков  $PY$ ,  $AB$  и окружности  $\Omega$ . Пусть  $T_3$  — точка пересечения общих внешних касательных к окружности, касающейся  $\Omega$ , отрезка  $RX$  и продолжения  $AR$  за точку  $R$ , и окружности, касающейся  $\Omega$  и продолжений  $XY$  и  $AC$  за точки  $Y$  и  $C$  соответственно. Докажите, что точки  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  лежат на одной прямой.

6. Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  — два ненулевых многочлена с вещественными коэффициентами,  $\deg P < \deg Q$ . Докажите, что существует единственная последовательность многочленов  $H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)$  с вещественными коэффициентами такая, что  $0 < \deg H_1 < \deg H_2 < \dots < \deg H_n$  и

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_1 H_2} + \dots + \frac{1}{H_1 H_2 \dots H_n}.$$

7. В треугольнике  $ABC$  точки  $O$  и  $H$  — центр описанной окружности и точка пересечения высот соответственно. Касательные в точках  $B$  и  $C$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекают прямые  $AC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Прямые  $BO$  и  $CH$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $CO$  и  $BH$  пересекаются в точке  $Q$ . Оказалось, что  $EF \perp BC$ . Докажите, что  $OP = OQ$ .

8. Барон Мюнхгаузен утверждает, что покрасил множество натуральных чисел в 9 цветов так, что не существует одноцветных чисел  $x, y, z$ , не все из которых равны, удовлетворяющих равенству  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ . Могут ли его слова быть правдой?

9. В музее есть 82 монеты, Все они весят одинаково, за исключением одной фальшивой — она легче остальных. В городе живут три сертифицированных эксперта. Каждому из них утром можно принести две группы из равного количества монет, чтобы он их взвесил. Вечером эксперт сообщает своё заключение: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что два эксперта честные, а третий — лжец (он взвешивает то, что ему дали, но сообщает любой из двух неверных результатов). Как найти фальшивую монету за 3 дня?

10. Дано положительное число  $r < 1$ . Найдите наибольшее число  $C$  такое, что неравенство

$$C \sum_{n=0}^N \frac{w_n^2}{r^n} \leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(w_{n+1} - w_n)^2}{r^n}$$

верно для любого натурального  $N > 1$  и любых вещественных чисел  $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}, w_N = 0$  с нулевой суммой.

**Второй тур 27.11.2025. Первая лига.**

1. У Саши и Ильи есть граф с 2025 вершинами без рёбер. Вершины пронумерованы числами  $1, 2, \dots, 2025$ . Саша и Илья делают ходы по очереди, начинает Саша. За один ход игрок проводит одно ребро, при этом в графе не должно появиться кратных рёбер и циклов. После проведения ребра между вершинами  $i$  и  $j$  ему присваивается вес  $|i - j|$ . Когда рёбер больше проводить нельзя, считается сумма весов всех проведенных ребер. Саша стремится сделать ее как можно большей, а Илья — как можно меньшей. Чему будет равна эта сумма при правильной игре?

2. Пусть  $P$  — фиксированный выпуклый многогранник. Докажите, что существует константа  $c > 0$  со следующим свойством: если поверхность  $P$  целиком покрыта  $n$  шарами суммарного объема  $V$ , то  $n \geq c/V^2$ . Константа  $c$  может зависеть от  $P$ .

3. Назовем два натуральных числа *2999-похожими*, если из них можно вычёркиваем цифр получить одно и то же натуральное число, делящееся на 2999. Верно ли, что для любого натурального  $k$  существуют  $k$  различных натуральных чисел, делящихся на 2999, любые два из которых не являются 2999-похожими? (Вычёркивать нужно хотя бы одну, но не все цифры.)

4. Клетки таблицы  $n \times n$ , где  $n > 1$ , заполнены натуральными числами от 1 до  $n$  так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Рассмотрим все (неупорядоченные) пары клеток, находящихся в одной строке. Назовём такую пару *правильной*, если число в левой клетке меньше, чем в правой. Найдите наибольшее возможное количество правильных пар клеток.

5. Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . Прямая  $\ell$  пересекает отрезки  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно, продолжение  $AC$  за точку  $A$  в точке  $R$ , а меньшие дуги  $AB$  и  $BC$  окружности  $\Omega$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть  $T_1$  — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, касающимся отрезков  $QY$ ,  $BC$  и окружности  $\Omega$ ; а  $T_2$  — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, касающимся отрезков  $PY$ ,  $AB$  и окружности  $\Omega$ . Пусть  $T_3$  — точка пересечения общих внешних касательных к окружности, касающейся  $\Omega$ , отрезка  $RX$  и продолжения  $AR$  за точку  $R$ , и окружности, касающейся  $\Omega$  и продолжений  $XY$  и  $AC$  за точки  $Y$  и  $C$  соответственно. Докажите, что точки  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  лежат на одной прямой.

6. Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  — два ненулевых многочлена с вещественными коэффициентами,  $\deg P < \deg Q$ . Докажите, что существует единственная последовательность многочленов  $H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)$  с вещественными коэффициентами такая, что  $0 < \deg H_1 < \deg H_2 < \dots < \deg H_n$  и

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_1 H_2} + \dots + \frac{1}{H_1 H_2 \dots H_n}.$$

7. В треугольнике  $ABC$  точки  $O$  и  $H$  — центр описанной окружности и точка пересечения высот соответственно. Касательные в точках  $B$  и  $C$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекают прямые  $AC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Прямые  $BO$  и  $CH$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $CO$  и  $BH$  пересекаются в точке  $Q$ . Оказалось, что  $EF \perp BC$ . Докажите, что  $OP = OQ$ .

8. Барон Мюнхгаузен утверждает, что покрасил множество натуральных чисел в 9 цветов так, что не существует одноцветных чисел  $x, y, z$ , не все из которых равны, удовлетворяющих равенству  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ . Могут ли его слова быть правдой?

9. В музее есть 60 монет, Все они весят одинаково, за исключением одной фальшивой — она легче остальных. В городе живут три сертифицированных эксперта. Каждому из них утром можно принести две группы из равного количества монет, чтобы он их взвесил. Вечером эксперт сообщает своё заключение: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что два эксперта честные, а третий — лжец (он взвешивает то, что ему дали, но сообщает любой из двух неверных результатов). Как найти фальшивую монету за 3 дня?

10. Положительные  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $a + b + c \geq ab + bc + ac$ . Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + b}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2 + c}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2 + a}{c^2 + ca + a^2} \geq 2.$$